|  |  |
| --- | --- |
| Théorème :  Soit  Alors converge ssi | Théorème :  Soit  Alors converge ssi |
| Démonstration : Posons    est continue sur  Il suffit donc d’étudier l’existence d’une limite finie de   * Cas où   Soit  Or  Ainsi   * Cas où   Soit ,  Ainsi . | Démonstration : Posons    est continue sur ]  Il suffit donc d’étudier l’existence d’une limite finie de   * Cas où   Soit  Ainsi   * Cas où   Soit ,  Ainsi . |

Théorème (IPP généralisée) :

Soient de classe . Si l’intégrale converge et si la fonction admet des limites finies en , alors converge et on a :

Démonstration :

Comme sont de classe sur est dérivable sur et .

Notons une primitive de , alors est une primitive de (car est dérivable sur ) et .

Comme converge, admet des limites finies en , comme (par hypothèse), donc admet aussi des limites finies en , donc converge.

De plus,

Exemples de fonctions intégrables

1. Soit . La fonction de Riemann est intégrable sur et intégrable sur .
2. La fonction est intégrable sur En effet, est continue positive, donc . Une primitive de , avec

Donc converge (et vaut 1).

1. Toute fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment.

Propriété : Soient un intervalle de un point adhérent à , et

1. Si , alors
2. Si , alors

Démonstration :

1. Si , alors définie sur un voisinage de tel que , avec .

Alors tel que

D’où

Donc .

1. Supposons que

Alors définie sur un voisinage de tel que ,

avec .

Alors tel que

D’où

Donc .

Et comme la relation d’équivalence est symétrique, on a bien

Théorème : Intégrales de Bertrand

Soient , la fonction  est intégrable sur ssi ou (

Démonstration :

Posons , . est continue et à valeurs >0

Soit .

* Si , on pose . Alors

D’où car

Donc par la règle de Riemann, comme est intégrable (car ), alors l’est également.

* Si , on pose ,

Donc il existe tel que pour tout

D’où

Or n’est pas intégrable sur donc par comparaison de fonctions à valeurs positives, n’est pas intégrable sur et donc sur

* Si ,

Qui a même nature que

Qui converge ssi

Corollaire :

Soient , . La fonction est intégrable sur ssi ou )

Démonstration :

La fonction est à valeurs >0 sur , donc

Par le changement de variable ,

Or , donc intégrable sur